I - Fonctions continues

Th : (Heine) Si $f : K \to F$ continue avec K cpct, f est uniformé^t continue. Preuve : 1) Soit $\varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists \delta(x) > 0$ tq $d(x,y) < \delta(x) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ car f continue

2) $K = \bigcup_{x \in K} B(x, \delta(x)) = \bigcup_{x \in F} B(x, \delta(x))$, $|F| < \infty$ car K compact

3) $\delta := \min_{x \in F} \delta(x)$

Th : (extension) Si $f : X_0 \to F$ est u.c., $X_0 \subset X$ dense et F cplt, f admet une unique extension continue à X.

+ f est u.c. sur X.

Preuve : 1) prendre $x \in X$ et $(x_n)_n \subset X_0$ tq $x_n \to x$ car X_0 dense

2) $(f(x_n))_n$ est de Cauchy car f est u.c.

3) $(f(x_n))_n$ converge car F cplt

4) Noter $f(x) := \lim_n f(x_n)$, ne dépend pas de $(x_n)_n$ donc bien définie.

Contre exemple : $X = [0,1]$, $X_0 = (0,1]$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. Continue mais pas u.c.

Produits d'espaces :

Prop : $(X_n, d_n)_{n \geq 0}$ des espaces métriques.

$X = \prod_{n \geq 0}^{\infty} X_n$ muni de la topologie produit (cv coordonnée par coordonnées) est métrisable.

La distance $d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{d_n(x_n, y_n)}{d_n(x_n, y_n) + 1}$ induit la topologie produit.

En particulier pour $(x^k)_k \subset X$ notée $x^k = (x_n^k)_n \in X$,

$x^k \to x$ dans $X \iff x_n^k \to x_n$ dans X_n $\forall n$

($\Rightarrow$ facile, $\Leftarrow$ par convergence dominée)

Prop : Si chaque X_n de la prop. prec. est compact, (X, d) l'est aussi

Preuve : pour $(x^k)_k \subset X$ arbitraire, on prend une ss $(x_1^{k'})_{k'}$ qui converge car $(x_1^k)_k \subset X_1$ avec X_1 cpct. Puis on prend une ss $(x_2^{k''})_{k''}$ qui converge car $(x_2^{k'})_{k'} \subset X_2$ avec X_2 cpct. Ainsi de suite par récurrence. On a alors une ss $(x^{u(k)})_k$ tq $(x_n^{u(k)})_k$ cv $\forall n$.

Th (Tychonoff) : si $(X_i, d_i)_{i\in I}$ sont compacts et I non-dénombrable, $X = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit est compact mais pas métrisable.

Séparabilité :

Prop : Métrique + compact $\Rightarrow$ séparable

Preuve :

1) $X = \bigcup_{x\in X} B(x, 2^{-n}) = \bigcup_{x\in X_n} B(x, 2^{-n})$ pour un $X_n \subset X$ fini

car X est compact. On prend des boules car X métrique

2) $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ est dénombrable (union dénombrable de parties finies) et dense (car pour tout $x \in X$ et $n \geq 0$ il existe un $x_n \in X_n$ tq $x \in B(x_n, 2^{-n})$, i.e. $d(x, x_n) \leq 2^{-n}$)

Prop : X séparable + $(O_i)_{i\in I}$ ouverts disjoints $\Rightarrow$ I au plus dénombrable

Preuve : 1) $D \subset X$ dénombrable et dense car X séparable

2) pour tout $i \in I$, choisir $x \in D \cap O_i$ ($\neq \emptyset$ car O_i ouvert et D dense) noté $\Phi(i)$

3) $\Phi : I \to D$ est injectif ($i \neq j$ et $\Phi(i) = \Phi(j)$, alors $\Phi(i) \in O_i \cap O_j = \emptyset$ car $(O_i)_{i\in I}$ disjoints, absurde)

4) $\text{Card } I = \text{Card } \Phi(I) \leq \text{Card } D = \text{Card } \mathbb{N}$, ie I dénombrable

Th (Arzelà-Ascoli) $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K; F)$ avec K métrique cpct et F cplt

$$\overline{\mathcal{F}} \text{ est cpct} \iff \left| \begin{array}{l} (i)\ \forall x \in K,\ \{f(x) \mid f \in \overline{\mathcal{F}}\} \text{ compact} \\ (ii)\ \mathcal{F} \text{ est équicontinue} \end{array} \right.$$

Nb : - Si $F = \mathbb{R}^d$, (i) signifie $\forall x \in K$, $\{f(x) \mid f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ borné

- $\mathcal{F}$ est équicontinue par exemple si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^1(K; F)$ et $\|Df\| \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}$, ou encore si $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x-y\|^\alpha$ pour tout $x, y \in K$, $f \in \mathcal{F}$ avec $M > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ indépendants de f.

Th (Stone-Weierstrass) K métrique compact.
$V \subseteq \mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ est dense si
(i) V contient les constantes
(ii) V sépare les points $(x \neq y \Rightarrow \exists f \in V$ tq $f(x) \neq f(y))$
(iii) V est stable par $|\cdot|$ $(f \in V \Rightarrow |f| \in V)$

Th : (S.W. version algèbre) $A \subseteq \mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ algèbre est dense si
(i) A contient les constantes
(ii) A sépare les points

Nb : Si $A \subset \mathcal{C}(K;\mathbb{C})$ vérifie (i) et (ii) et est stable par conjugué complexe $(f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A)$ alors A est dense.

Espaces vectoriels normés

- E un evn et F un Banach, $\mathcal{L}(E;F)$ est un Banach.

Preuve : $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(E;F)$ de Cauchy, $\|f_n\| \leq M$ car $(\|f_n\|)_n \subseteq \mathbb{R}$ de Cauchy.
Pour tout $x \in E$ $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc cv car F cplt
donc $f_n(x) \longrightarrow$ limite notée $f(x)$, et $\|f_n(x)\| = \lim_n \|f_n(x)\| \leq M\|x\|$

- E evn, $E_0 \subset E$ dense et F Banach, $f \in \mathcal{L}(E_0;F)$, f s'étend continûment sur E (car f linéaire continue $\Rightarrow f$ u.c.)

Th : (Baire) X un espace métrique complet, $(U_n)_{n\geq 0}$ des ouverts denses, $U = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ est dense (bien que peut être pas ouvert)
ou bien, si $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ avec F_n fermé alors au moins un F_n est d'intérieur $\neq \emptyset$ (i.e. contient une boule)

Th : (Banach-Steinhaus) $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E;F)$ avec F evn et E Banach
$\forall i, \forall \|x\| \leq 1$, $\|f_i(x)\| \leq M_x \Rightarrow \forall i, \forall \|x\| \leq 1, \|f_i\| \leq M$
i.e. $(\forall x, \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| < \infty) \Rightarrow \sup_{i\in I} \|f\| < \infty$

Ce th montre que : borne ponctuelle uniforme en $i \Rightarrow$ borne uniforme en x et i

Preuve,

1) $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \mid \|f_i(x)\| \leq n, \forall i\}$ car

$x \in E \Rightarrow \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| < \infty \Rightarrow \forall i, \|f_i(x)\| \leq n$ pour n a.g.

2) $\{x \mid \|f_i(x)\| \leq n, \forall i\} = \bigcap_i f^{-1}(B(0,n))$ est fermé car chaque f_i est continue

3) Par Baire pour un certain n, $B(y,r) \subset \{x \mid \|f_i(x)\| \leq n \ \forall i\}$ car E complet. i.e. $(f_i)_i$ uniformément borné sur $B(y,r)$, mais on le veut

4) On recentre en 0 : soit $\|x\| < r$

$$\|f_i(x)\| \leq \underbrace{\|f_i(x+y)\|}_{\leq n} + \underbrace{\|-f_i(y)\|}_{\leq n} \leq 2n \quad \forall i$$

5) On normalise : soit $\|x\| = 1$, $\|f_i(x)\| = \frac{1}{r}\|f_i(\underbrace{rx}_{B(0,r)})\| \leq \frac{2n}{r}$

Corollaire Si $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}(E;F)$ avec E Banach tq $f_n(x) \to f(x) \ \forall x$, alors (i) $(f_n)_n$ est bornée

(2) $\|f\| \leq \liminf \|f_n\| = \lim_n \inf\{\|f_k\| \mid k \geq n\}$

= plus petite valeur d'adhérence de $(\|f_n\|)_n$

Th: (Application ouverte / Banach-Schauder) E et F deux Banach, $f \in \mathcal{L}(E;F)$

f surjective $\Leftrightarrow$ f ouverte

Preuve: f ouverte $\Rightarrow f(B(0,1)) \supset B(0,r)$ pour $r > 0$ a.p.

$$f(E) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n B(0,1)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n f(B(0,1)) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} n B(0,r) = F$$

1) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \overline{f(B(0,1))}$, par Baire (car F cplt et qq détails techniques) il existe $B(0,1) \subset \overline{f(B(0,r))}$ pour r a.g., mais on veut $B(0,1) \subset f(B(0,s))$.

$s < 1$

2) Soit $y \in B(0,1)$, on va construire $(x_n)_n$ suite de Cauchy $(x_n)_n \subseteq \overline{B(0,s)}$ telle que $y = f(x_n) + \varepsilon_n$ avec $\|\varepsilon_n\| \leq 2^{-n}$. Comme E est Banach $x_n \to x$ pour un $x \in \overline{B(0,s)}$ et $y = \lim_n (f(x_n) + \varepsilon_n) = f(x)$.

$\underline{n=0:}$ $B(0,1) \ni y$ est dans l'adhérence de $f(B(0,r))$
donc il existe $x_0 \in B(0,r)$ tq $\|y - f(x_0)\| < \frac{1}{2}$.
On note $\delta_0 = x_0$.
$\underline{n \to n+1:}$ supposons construit x_n tq $\|y - f(x_n)\| \leq 2^{-(n+1)}$.
On cherche x_{n+1}

$$y = f(x_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}, \quad \|\varepsilon_{n+1}\| \leq 2^{-(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y - f(x_n)}_{B(0,2^{-(n+1)})} = f(x_{n+1} - x_n) + \varepsilon_{n+1}$$

On $B(0, 2^{-(n+1)}) \ni y - f(x_n)$ est dans l'adhérence de $f\, B(0, r 2^{-(n+1)})$
donc il existe $\delta_n \in B(0, r 2^{-(n+1)})$ tq $y - f(x_n) = f(\delta_n) + \varepsilon_{n+1}$
avec $\|\varepsilon_{n+1}\| \leq 2^{-(n+2)}$. On pose $x_{n+1} = x_n + \delta_n$.

Ainsi $x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ existe car $\sum_{n=0}^{\infty} \|\delta_n\| < \infty$ et <u>E est Banach</u>.

<u>Th</u> (Isomorphisme de Banach) : E et F <u>deux Banach</u>, $T \in \mathcal{L}(E;F)$ bijective, T est un isomorphisme (ie T bijective continue + inverse cont.)
<u>Preuve</u>: T linéaire surjective donc ouverte, donc T^{-1} continue par l'Application ouverte, car <u>E et F Banach</u>.

<u>Th</u> (Graphe fermé) : E et F <u>deux Banach</u>, $T : E \to F$ linéaire fermée (ie. son graphe $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$), alors T est continue.

<u>Preuve</u>:

1) Poser $(E, |\cdot|)$ où $|x| = \|x\| + \|f(x)\|$, $(E, |\cdot|)$ est complet car <u>$G(T)$ est fermé</u>.

2) $(E, |\cdot|) \to (E, \|\cdot\|)$, $x \mapsto x$ est bijective continue car $\|\cdot\| \leq |\cdot|$, par l'isomorphisme de Banach car <u>E et F Banach</u> il existe $M > 0$ tq $|\cdot| \leq M \|\cdot\|$ et en particulier pour tout $x \in E$
$\|Tx\| \leq M \|x\|$.

Dualité

Th : (Hahn - Banach) E un evn, $E_0 \subset E$ un sev et $l \in E_0'$ (i.e. $l : E_0 \to \mathbb{K}$ est linéaire continue), l peut être étendue à E en préservant sa norme.

Corollaire : $\|x\| = \sup_{\|l\|=1} \langle l, x \rangle$

Preuve : $\leq$ par continuité de l, $\geq$ par Hahn-Banach.

Proposition : E' séparable $\Rightarrow$ E séparable

Preuve :

1) Prendre $(l_n)_n \subseteq E'$ dense car E' séparable
2) Prendre $(x_n)_n \subseteq E$ tq $\|x_n\| = 1$ et $l_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|l_n\|$
   $\left(\text{possible car } \|l_n\| = \sup_{\|x\|=1} l_n(x) \geq \frac{1}{2}\|l_n\|\right)$
3) $\mathrm{Vect}(x_n \mid n \geq 0)$ est dense dans E.

Remarque : la réciproque est fausse : l^1 séparable mais pas $(l^1)' = l^\infty$.

Proposition : $i : E \to E''$, $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$ est une isométrie.

Exercice : Soit E et F deux evn et $T \in \mathcal{L}(E;F)$ fortement injective (ie il existe $\alpha > 0$ tq $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$) alors T est injective et d'image fermée.

L'idée d'une isométrie $\Phi : (E, \|\cdot\|) \to (F, |\cdot|)$ est de renommer les éléments de E de façon que F ait exactement les mêmes propriétés que E d'un point de vue d'espace normé, c'est-à-dire qu'on renomme $x \in E$ en $x' = \Phi(x) \in F$ ainsi

$x + \lambda y = z \iff x' + \lambda y' = z'$

$\|x'\| = \|x\|$

$0 = 0'$ $\qquad x_n \to x \iff x_n' \to x$ etc.

Définition : E est dit réflexif lorsque $i : E \to E''$ est surjective,
E et E'' sont alors isométriques, c'est pourquoi on les identifie.

Prop. : $E \simeq F$ et E réflexif $\Rightarrow$ F réflexif.

Remarque : Cela veut dire que la réflexivité est un invariant d'isomorphisme, c'est donc une propriété propre à la structure d'evn, autrement dit elle ne dépend que de la classe d'isomorphisme (comme la complétude ou la séparabilité).

Prop : E réflexif et $E_0 \subset E$ sev fermé $\Rightarrow$ E_0 réflexif.

Preuve : Notons $\Phi : E_0 \to E$ l'injection canonique.

1) Soit $L \in E_0''$, E étant réflexif il existe $x \in E$ tq $i(x) = {}^{tt}\Phi L$.

2) $x \in E_0$, sinon par H.B. et E_0 fermé il existe $l \in E'$ tq $l(x) = 1$ et $l \equiv 0$ sur E_0.

$$1 = \langle l, x \rangle = \langle i(x), l \rangle = \langle {}^{tt}\Phi L, l \rangle = \langle L, \underbrace{{}^{t}\Phi l}_{0} \rangle = 0 \quad \lightning$$

3) Pour tout $l \in E_0'$, $\langle L, l \rangle = \langle l, x \rangle$ (étape intermédiaire par H. B.).

Prop : E Banach, E réflexif $\Leftrightarrow$ E' réflexif

Preuve : écriture rigoureuse (à l'aide des isométries) de $(E')'' = (E'')' = E'$.
E Banach permet de montrer E' réflexif $\Rightarrow$ E réflexif. réf de E

Prop : E Banach, E réflexif séparable $\Leftrightarrow$ E' réflexif séparable.

Topologies faibles et faible* :

Déf (topologies forte, faible et faible*) Soit E un evn

Topologies sur E :

- topologie forte, engendrée par la norme, ie la topologie rendant $\|\cdot\|_E$ continue.
  Donc x_n cv vers x pour la topologie forte signifie $\|x_n - x\|_E \to 0$, noté $x_n \to x$.
- topologie faible, notée $\sigma(E, E')$, engendrée par $\{l\}_{l \in E'}$, ie celle rendant continue chaque $l \in E'$. Donc x_n cv vers x pour la topologie faible signifie que pour tout $l \in E'$, $\langle l, x_n \rangle_E \to \langle l, x \rangle_E$, noté $x_n \rightharpoonup x$.

Topologies sur le dual E' :

- topologie forte, engendrée par la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{E'}$,
  donc l_n cv vers l pour la topologie forte si $\|l_n - l\|_{E'} \to 0$.
- topologie faible* (préfaible), notée $\sigma(E', E)$, engendrée par $\{i(x)\}_{x\in E}$,
  donc l_n cv vers l pour la topologie faible* si $\langle i(x), l_n\rangle_{E'} \to \langle i(x), l\rangle_{E'}$
  pour tout $x \in E$, ie $\langle l_n, x\rangle \to \langle l, x\rangle$, notée $l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l$.
  La topologie faible* est celle de la convergence ponctuelle.

$$\sigma(X, Y) \qquad \text{(explication de la notation)}$$

X : espace de base

Y : espace d'où viennent les formes linéaires que l'on veut rendre continues

⚠ Ces topologies sont en général distinctes.

Prop : Si E est réflexif, $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$, ie les topologies faibles et faible* sur E' sont les mêmes.

Preuve : Si E est réflexif, $\{i(x)\}_{x\in E} = \{l\}_{l \in E''}$, donc les topologies engendrées sont les mêmes.

Prop :
1) $l_n \to l \Rightarrow l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l$
2) $l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l \Rightarrow \sup_n \|l_n\| < \infty$ par Banach-Steinhaus
3) $\left.\begin{array}{l} l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l \\ x_n \to x \end{array}\right| \Rightarrow \langle l_n, x_n\rangle \to \langle l, x\rangle$
4) $l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (l_n)_n \text{ cv ponctuellement sur une partie dense} \\ \sup \|l_n\| < \infty \end{array}\right.$

Et idem pour $\rightharpoonup$ en utilisant l'injection isométrique pour 2).

Th (Banach-Alaoglu) : Soit E un evn séparable et $(l_n)_n \subset E'$ bornée, il existe une sous-suite $(l_{n'})_{n'}$ et $l \in E'$ telles que $l_{n'} \overset{*}{\rightharpoonup} l$.

Preuve :
1) Soit $D \subset E$ dénombrable et dense car E est séparable.
2) Pour tout $x \in D$, $(l_n(x))_n \subset \mathbb{K}$ est borné car $(l_n)_n$ est bornée,
donc inclus dans un compact

3) Par extraction diagonale, on construit $(\ell_{n'})_{n'}$ qui converge ponctuellement sur D

4) On conclut par 4) de la prop. précédente

<u>Th</u> (Banach-Alaoglu réflexif) Soit E réflexif et $(x_n)_n \subset E$ bornée, il existe une sous-suite qui converge faiblement.

<u>Preuve</u> :

1) Poser $E_0 = \overline{\mathrm{Vect}(x_n : n \geq 0)}$ qui est donc séparable, et réflexif en tant que sev fermé de <u>E qui est réflexif</u>.

2) Par Banach-Alaoglu, il existe $(x_{n'})_{n'}$ et $x \in E_0$ tels que

$$x_{n'} \xrightarrow{E_0, *} x$$

(E_0 <u>est réflexif</u> et est donc "le dual de E_0'"), car <u>$(x_n)_n$ est bornée</u>.

3) <u>E_0 est réflexif</u> donc la topologie faible* correspond à la topologie faible, ainsi $x_{n'} \xrightarrow{E_0} x$.

4) $x_{n'} \xrightarrow{E_0} x$, ie $\forall \ell \in E_0'$, $\langle \ell, x_n \rangle_{E_0} \to \langle \ell, x \rangle$, en particulier comme $E' \subset E_0'$, $x_n \to x$.

<u>Espaces de Hilbert</u> :

<u>Prop</u> : Pour tout $A \subset H$, $A^\perp = \{h \in H \mid \langle h, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$ est fermé.

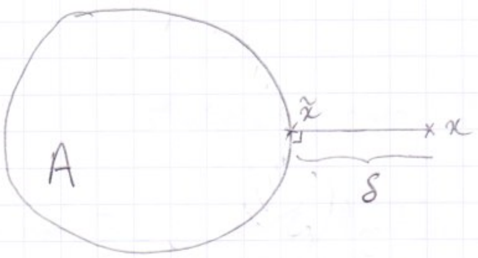
<u>Preuve</u>. $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \underbrace{\{h \in H \mid \langle h, a \rangle = 0\}}_{\text{fermé par continuité de } \langle \cdot, \cdot \rangle}$

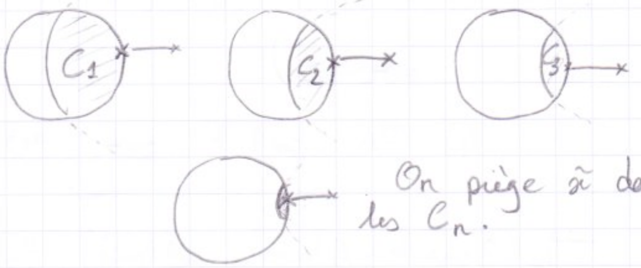
<u>Théorème</u> (Projection orthogonale) : Soit $A \subset H$ convexe, fermé et non-vide

(i) Pour tout $x \in H$, il existe un unique $\tilde{x} \in A$ tq $\|x - \tilde{x}\| = d(x, A)$, ie $\forall a \in A$, $\|x - \tilde{x}\| \leq \|x - a\|$.

(ii) $\tilde{x}$ est caractérisé par $\mathrm{Re}(\langle x - \tilde{x}, a - \tilde{x} \rangle) \leq 0$ pour tout $a \in A$.

Preuve : Supposons $x \notin A$, notons $\delta = \mathrm{dist}(x, A) > 0$.





On piège $\tilde{x}$ dans les C_n.

Stratégie : $\tilde{x} \in A$ et $\tilde{x} \in \overline{B(x,\delta)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B(x, \delta + 2^{-n})$, donc

$$\tilde{x} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\overline{B(x, \delta + 2^{-n})} \cap A\right)}_{C_n}.$$

1) Par l'identité de la médiane, $\mathrm{diam}(C_n) \leq 2^{-n+2}$ car A est convexe.

2) Par définition de $\delta = \inf\{ d(x,a) \mid a \in A \}$, $C_n \neq \emptyset$

3) C_n est fermé car A est fermé.

4) H est complet donc $\bigcap_{n \geq 0} C_n = \{\tilde{x}\}$ pour un certain $\tilde{x} \in A$.

Th (Projection orthogonale sur un espace fermé) Soit F un sous-espace fermé de H,

$$P : H \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto \tilde{x} \text{ proj. ortho de } x \text{ sur } F$$

1) $P \in \mathcal{L}(H)$ et $\|P\| = 1$

2) $\mathrm{Im}\, P = F$ et $\ker P = F^{\perp}$

3) $P^* = P$ et $P^2 = P$.

Prop : Soit F un sev de H

1) Si F est fermé, $F^{\perp\perp} = F$.

2) $F^{\perp\perp} = \overline{F}$

3) F dense $\Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$

Th (Riesz-Fréchet) : H s'identifie isométriquement à son dual via

$$\Phi : H \longrightarrow H'$$
$$x \longmapsto \langle \cdot, x \rangle$$

qui est une isométrie surjective semi-linéaire.

Th : Un espace de Hilbert est réflexif (« $H'' = (H')' = H' = H$ »)

Exercices sur coercivité, Lax-Milgram, etc.

Prop: $x_n \to x \iff \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\| \end{cases}$

Preuve: Montrer que $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle$ tend vers 0 ssi $x_n \rightharpoonup x$ et $\limsup\limits_n \|x_n\| \leq \|x\|$.

Th: Soit $(x_n)_n \subset H$ deux à deux orthogonaux

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge (commutativement) dans H vers $x \in H$

et $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$

(ii) $\sum \|x_n\|^2 = \infty \Rightarrow \lim\limits_N \left\| \sum\limits_{n=0}^{N} x_n \right\|^2 = \infty$

Th: Soit $(e_n)_n \subset H$ une suite orthonormale

(i) Soit $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{K}$, $\sum \lambda_n e_n$ converge $\iff \lambda \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$

(ii) Soit $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_n, n \geq 0)}$, pour tout $x \in E$ il existe une unique suite $\lambda \in \ell^2$ tq $x = \sum \lambda_n e_n$, donnée par $\lambda_n = \langle x, e_n\rangle$.

Autrement dit $\Phi : F \to \ell^2$
$x \mapsto \lambda$, où $\lambda_n = \langle x, e_n\rangle$

est une isométrie surjective identifiant F à ℓ^2.

Th: H séparable $\iff$ H admet une base hilbertienne dénombrable $\iff H \simeq \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$

Nb: Un Hilbert admet toujours une base hilbertienne par le lemme de Zorn, mais il faut et suffit que H soit séparable pour que cette base soit dénombrable. En effet si $(x_n)_n \subset H$ est dense dans H on en tire une base hilbertienne par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.